www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

CONCOURS EXTERNE D'ELEVE ATTACHE et

CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE OPTION A

ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

(Division des Cadres de Gestion Statistique) JUIN 1989

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (Durée : 4 heures)

N.B : 1 - Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{C}$. Cependant, les intégrales introduites ne concernent que des fonctions réelles de variable réelle.

2 - $\mathbb{C}(X)$ [resp.$\mathbb{R}(X)$] est l'ensemble des polynômes à une indéterminée, à coefficients dans $\mathbb{C}$(resp.$\mathbb{R}$).

Toutes les fois que ce sera utile, on identifiera, par abus de langage, le polynôme P, élément de $\mathbb{R}(X)$, et la fonction polynôme associée $x \longrightarrow P(x)$.

3 - n désigne partout un élément de $\mathbb{N}^*$; k et s désignent également des entiers.

4 - La question 3) de la partie I n'exige pas la résolution des deux premières questions de la même partie. La partie préliminaire, la partie I et la partie II sont mutuellement indépendantes. Toutefois, pour traiter la partie II avant la partie I, on devrait admettre que le polynôme P_n n'admet aucun zéro réel.

PARTIE PRELIMINAIRE

Δ et D étant deux polynômes de $\mathbb{C}(X)$, on définit une fraction rationnelle f en posant : $$f(X) = \frac{\Delta(X)}{D(X)}$$

a désigne un complexe tel que $D(a) = 0$, $D'(a) \neq 0$, $\Delta(a) \neq 0$.

Montrer que la partie de la décomposition de f en éléments simples sur $\mathbb{C}$ relative au pôle a est $\frac{A}{X-a}$, où : $$A = \frac{\Delta(a)}{D'(a)}$$

PARTIE I

1 - h étant un réel tel que $\sin \frac{h}{2} = 0$, montrer que si l'on pose :

$$S_n(h) = \sum_{k=1}^{n} \cos k\,h, \qquad \Sigma_n(h) = \sum_{k=1}^{n} \sin k\,h,$$

on a les égalités : $$S_n(h) = \frac{\sin \frac{n\,h}{2} \cdot \cos (n+1)\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}}, \quad \Sigma_n(h) = \frac{\sin \frac{n\,h}{2} \cdot \sin (n+1)\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}}$$

.../...

2 - On pose, en supposant toujours $\sin \frac{h}{2} \neq 0$, $\sigma_n(h) = \sum_{k=1}^{n} k \sin k h$.

Montrer à l'aide de la question 1) que :

$$\sigma_n(h) = \frac{\cos \frac{h}{2} \cdot \sin (2n+1) \frac{h}{2} - (2n+1) \cos (2n+1) \frac{h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2}}{4 \sin^2 \frac{h}{2}}.$$

3 - On pose : $P_n(X) = \sum_{k=0}^{2n} X^k$.

Montrer que P_n n'admet aucun zéro réel, et que l'ensemble des zéros non réels de P_n dans $\mathbb{C}$ est : $\bigcup_{1 \leq k \leq n} \{x_k, \bar{x}_k\}$, où $x_k = e^{\frac{2\pi i k}{2n+1}}$.

En déduire que, quel que soit le réel x, $P_n(x) > 0$.

PARTIE II

x étant un réel, P_n le polynôme défini en I-3), et s un entier tel que $0 \leq s \leq 2n-2$, on pose :

$$f_{n,s}(x) = \frac{x^s}{P_n(x)},$$

$$I_{n,s} = \int_{-\infty}^{-1} f_{n,s}(x)\,dx \; ; \; J_{n,s} = \int_{-1}^{0} f_{n,s}(x)\,dx \; ;$$

$$K_{n,s} = \int_{0}^{1} f_{n,s}(x)\,dx \; ; \; L_{n,s} = \int_{1}^{+\infty} f_{n,s}(x)\,dx \; ;$$

$$U_{n,s} = \int_{-\infty}^{0} f_{n,s}(x)\,dx \; ; \; V_{n,s} = \int_{0}^{+\infty} f_{n,s}(x)\,dx.$$

(On a donc $U_{n,s} = I_{n,s} + J_{n,s}$ et $V_{n,s} = K_{n,s} + L_{n,s}$).

1 - Justifier l'existence de $I_{n,s}$ et de $L_{n,s}$.

2 - Calculer $U_{1,0}$ et $V_{1,0}$ et vérifier que les résultats s'expriment simplement à l'aide de π.

3 - Montrer que : $U_{n,s} = U_{n,2n-2-s}$ et $V_{n,s} = V_{n,2n-2-s}$.

4 - s est ici un entier positif ou nul, fixé ; n est un entier tel que $2n-2 \geq s$. On se propose d'étudier $\lim_{n \to +\infty} U_{n,s}$ et $\lim_{n \to +\infty} V_{n,s}$.

a) Donner une majoration très simple de $|L_{n,s}|$ et en déduire $\lim_{n \to +\infty} L_{n,s}$.

b) Majorer de même $|I_{n,s}|$ et en déduire $\lim_{n \to +\infty} I_{n,s}$. On pourra remarquer que, si $x \neq 1$, $\frac{1}{P_n(x)} = \frac{1-x}{1-x^{2n+1}}$.

.../...

c) Montrer que $K_{n,s}$ admet, lorsque $n \to +\infty$, une limite qu'on calculera. On pourra pour cela majorer $\left| \int_0^1 \left[\frac{x^s}{P_n(x)} - x^s(1-x) \right] dx \right|$.

d) Calculer de même $\lim_{n \to +\infty} J_{n,s}$ en s'inspirant de ce qui précède.

e) Déduire des résultats précédents $\lim_{n \to +\infty} U_{n,s}$ et $\lim_{n \to +\infty} V_{n,s}$.

PARTIE III

Les notations sont celles des parties I et II et on suppose de plus que s=0. L'objet de cette partie est le calcul explicite de $U_{n,0}$ et de $V_{n,0}$ en fonction de n.

1 - Montrer que pour tout x réel : $(2n+1)\, f_{n,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k(x_k-1)}{x-x_k} + \frac{\bar{x}_k(\bar{x}_k-1)}{x-\bar{x}_k} \right)$.

2 - En déduire l'existence de réels $a_{n,0,k}$ et $b_{n,0,k}$ tels que, pour tout x réel :

$$(2n+1)\, f_{n,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n,0,k}\left(2x - 2\cos\frac{2\pi k}{2n+1}\right) + b_{n,0,k}}{x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + 1}.$$

Donner de $a_{n,0,k}$ et de $b_{n,0,k}$ des expressions trigonométriques en fonction de n et de k débarrassées du symbole i des nombres complexes. On devra rechercher dans l'expression de $b_{n,0,k}$ la mise en facteur de $\sin\frac{2\pi k}{2n+1}$, après avoir montré que : $b_{n,0,k} = \cos\frac{6\pi k}{2n+1} - \cos\frac{4\pi k}{2n+1} - \cos\frac{2\pi k}{2n+1} + 1$.

3 - Montrer sans calcul que $\sum_{k=1}^{n} a_{n,0,k} = 0$.

4 - Montrer que si $1 \leqslant k \leqslant n$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + 1} = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi k}{2n+1}}$;

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + 1} = \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi k}{2n+1}} \left(1 - \frac{2k}{2n+1}\right).$$

5 - Déduire de la question précédente des expressions de $(2n+1)\, V_{n,0}$ et de $(2n+1)\,(U_{n,0}+V_{n,0})$ comportant des signes de sommations "Σ".

6 - Calculer, en employant le III-5) ainsi que le I-1) et 2) des expressions de $U_{n,0}$ et de $V_{n,0}$ en fonction de n. Vérifier que, tous calculs faits :

$$U_{n,0} = \frac{\pi}{2n+1} - \frac{1 + 2\cos\frac{\pi}{2n+1}}{\sin\frac{2\pi}{2n+1}} \; ; \; V_{n,0} = \frac{\frac{\pi}{2n+1}}{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}.$$

.../...

7 - A l'aide des résultats précédents, retrouver $\lim_{n\to+\infty} U_{n,0}$ et $\lim_{n\to+\infty} V_{n,0}$.

8 - Vérifier les résultats de la question II-2).

PARTIE IV

Les notations sont toujours celles des parties I et II, mais s est un entier astreint seulement à vérifier $0 \leqslant s \leqslant 2n-2$. L'objet de cette partie est le calcul explicite de $U_{n,s}$ et $V_{n,s}$ en fonction de n et de s, selon une méthode s'inspirant de celle de la partie III.

1 - Montrer que pour tout x réel :

$$(2n+1)\ f_{n,s}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x_k^{s+1}\ (x_k - 1)}{x - x_k} + \frac{\bar{x}_k^{s+1}\ (\bar{x}_k - 1)}{x - \bar{x}_k} \right].$$

2 - En déduire l'existence de réels $a_{n,s,k}$ et $b_{n,s,k}$ tels que, pour tout x réel :

$$(2n+1)\ f_{n,s}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_{n,s,k} \left(2x - 2\cos\frac{2\pi k}{2n+1} \right) + b_{n,s,k}}{x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + 1} \right].$$

Donner des expressions trigonométriques de $a_{n,s,k}$ et de $b_{n,s,k}$ en fonction de n, s et k, en recherchant, dans l'expression de $b_{n,s,k}$, la mise en facteur de $\sin\frac{2\pi k}{2n+1}$.

3 - Déduire de ce qui précède des expressions de $(2n+1)\ (U_{n,s} + V_{n,s})$ et de $(2n+1)\ V_{n,s}$ comportant des signes de sommation "Σ".

4 - Calculer des expressions simples de $U_{n,s}$ et de $V_{n,s}$. Ces expressions feront intervenir $\frac{\pi}{2n+1}$, $\sin\frac{\pi}{2n+1}$, $\sin\frac{(s+1)\pi}{2n+1}$, $\sin\frac{(s+2)\pi}{2n+1}$ et $(-1)^s$.

5 - A l'aide des résultats précédents, retrouver, s étant fixé, $\lim_{n\to+\infty} U_{n,s}$ et $\lim_{n\to+\infty} V_{n,s}$, qui ont été calculés en II-4).

Retrouver également les résultats de II-3).

* *
*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail